$$0 \le \tilde{\tilde{s}}_1 \le \tilde{\tilde{s}}_2 \le \ldots \le g, \quad \lim_{n\to\infty} \tilde{\tilde{s}}_n(x) = g(x),\ x \in X.$$

Iz Lebegove teoreme o monotonoj konvergenciji sledi

$$\int_X \tilde{s}_n d\mu \to \int_X f d\mu, \ \int_X \tilde{\tilde{s}}_n d\mu \to \int_X g d\mu, \ n \to \infty. \tag{4.4}$$

Kako je

$$0 \le \tilde{s}_1 + \tilde{\tilde{s}}_1 \le \tilde{s}_2 + \tilde{\tilde{s}}_2 \le \ldots \le f + g,$$

$$\lim_{n\to\infty} (\tilde{s}_n(x) + \tilde{\tilde{s}}_n(x)) = f(x) + g(x), \quad x \in X.$$

Ponovo koristeći Lebegovu teoremu o monotonoj konvergenciji dobijamo

$$\int_X (\tilde{s}_n + \tilde{\tilde{s}}_n) d\mu = \int_X \tilde{s}_n d\mu + \int_X \tilde{\tilde{s}}_n d\mu \to \int_X (f+g) d\mu \tag{4.5}$$

Na osnovu (4.4) i (4.5) sledi tvrđenje propozicije. ■

Napomena: Kao posledica teoreme o monotonoj konvergenciji, važi uopštenje i Propozicije 1 a): Ako je f nenegativna merljiva funkcija na $(X, \mathcal{M}, \mu)$, tada je preslikavanje

$$\varphi_f(E) = \int_E f\, d\mu, \quad E \in \mathcal{M}$$

mera na $(X, \mathcal{M})$.

Teorema 4.3. Neka su $f_n : X \to [0, \infty]$ merljive funkcije i

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in X.$$

Tada važi

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dokaz: Iz Propozicije 4.2 sledi da za svako $n \in \mathbf{N}$ važi

$$\int_X \Big(\sum_{n=1}^{n} f_i \Big) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_X f_i d\mu$$

Kako je

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} f_i \le \sum_{i=1}^{n+1} f_i, \ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = f(x), \ x \in X,$$